

罕见灾难模型研究进展

◎ 黄小雨 金涛^①

内容摘要：罕见灾难模型，作为宏观金融领域的主流模型之一，为一系列的资产定价问题提供了一个极具洞察的想法和直观明了的框架。本文回顾了罕见灾难模型的提出、发展和演变的过程以及最新动态，着重介绍了几类具有代表性的罕见灾难模型，它们分别解释了股权溢价、无风险利率、股权收益波动率等长久以来困扰学术界的谜题。另外，罕见灾难模型还被应用于其他资产定价问题，如利率期限结构问题、期权定价的波动率偏离（volatility skewness）问题等。总而言之，罕见灾难模型为诸多经济金融问题的研究提供了重要的突破口，值得我们深入探索。

关键词：罕见灾难模型；股权溢价之谜；无风险利率之谜；股权收益波动率之谜；利率期限结构；波动率偏离

一、引言

宏观金融领域存在很多资产定价谜题，它们大多源于标准的经济模型，无法为实际的资产价格数据提供合理的解释。其中，围绕股权定价的相关谜题最为研究人员所关注。Mehra 和 Prescott（1985）最早提出股权溢价谜题（Equity Premium Puzzle），即基于消费的资产定价模型无法解释实际观测的如此之高的股权风险溢价，与此对应的是 Hansen 和 Jagannathan（1991）所提出的无风险利率之谜。研究者在试图解释股权收益每年 19%的

^① 作者简介：黄小雨，对外经济贸易大学金融学院，讲师，研究方向：宏观金融、资产定价。

金涛，清华大学五道口金融学院，助理教授，博士生导师，清华大学恒隆房地产研究中心货币与财政政策研究室，主任，研究方向：宏观金融、资产定价、金融计量。

基金项目：国家自然科学基金（71828301、71673166）、对外经济贸易大学中央高校基本科研业务费专项资金资助（18QD06）、清华大学自主科研计划（20151080450）。

波动率时同样遇到了困难 (Shiller (1981))。Campbell 和 Shiller (1988) 发现价格股息比 (price-dividend ratio) 可以预测长期股权收益, 而股权收益波动如此之大以致难以预测未来的股息 (Shiller (1981))。另外, 即使赋予较高的相对风险厌恶系数, 标准的基于消费的资产定价模型仍难以解释股权的高阶风险, 如方差风险溢价 (variance risk premium), 以及股权收益的短期可预测性。

在这些相关谜题之中, 最有名的谜题便是股权溢价谜题 (Equity Premium Puzzle)。Mehra 和 Prescott (1985) 认为, 相对无风险债券收益率而言, 股权收益率之高已经超过了合理的风险溢价水平, 不能被传统的基于消费的资产定价模型 (Consumption-Based Asset Pricing Model) 所解释。在股权溢价谜题提出之后, 不少研究者试图从宏观经济风险的角度解释该谜题, 提出了几类主流模型, 罕见灾难模型就是其中之一。罕见灾难的想法最早由 Rietz (1988) 提出, 他认为股权风险溢价的主要部分是对经济中潜在的罕见灾难风险的一种补偿。“罕见灾难”是指在宏观经济当中那些发生概率很小、平时十分罕见的事件。它们一旦发生, 往往造成一个国家经济急剧萎缩、人们生活水平大幅下降、金融市场剧烈震荡等巨大的负面影响。近一百年来, 世界范围内的罕见事件, 包括世界性和区域性的战争 (比如两次世界大战)、严重的经济金融危机 (比如 1930 年的大萧条、1997 年的亚洲金融危机) 和各类自然灾害 (比如 1918 年的全球性流感大流行、2011 年日本大地震) 等。Rietz 在其 1988 年的文章中将这种发生概率很小、但造成的损失巨大的罕见灾难加入消费过程中, 试图解释 Mehra 和 Prescott (1985) 提出的“股权溢价谜题”。但学术界认为 Rietz (1988) 的推导依赖于罕见事件不合理的发生概率和事件规模。Mehra 和 Prescott (1988) 对 Rietz (1988) 提出了质疑, 认为 Rietz 文章中将“事件”定义为消费下降幅度超过 25% 是不可信的。Barro (2006) 将 Rietz 的想法重新梳理并正式发展起来。Barro (2006) 实际测度了 20 世纪以来世界范围内的罕见事件, 认为这些罕见事件以每年 1.7% 的频率发生, 造成人均 GDP 下降 15%~64% 不等, 并根据传统的基于消费的资产定价模型给出了对股权溢价谜题的合理解释。

从 Barro (2006) 开始, 罕见灾难模型, 作为宏观金融领域解释资产定价问题的主要模型之一, 正式发展起来了。其后, 有很多文献进一步深入探索罕见灾难模型, 使得罕见灾难模型的框架、内涵以及解释力度和范围都得到了不同程度的拓展。在已有文献中, 从模型的设定框架角度而言, 主要可以分为以下两类: 以 Barro (2006, 2009) 的模型框架为代表的第一代罕见灾难模型, 以及以 Nakamura、Steinsson、Barro 和 Ursúa (2013) 的模型框架为代表的第二代罕见灾难模型。之所以这样分类, 是从罕见灾难模型文献的历史发展角度而言, Nakamura、Steinsson、Barro 和 Ursúa (2013) 的模型框架明显有别

于其他文献，它有效地克服了 Barro (2006, 2009) 模型的几个明显弱点，使得罕见灾难模型能够更加清晰准确地刻画消费灾难的变动过程。后文将以此为线索展开论述。

二、第一代罕见灾难模型

Barro (2006) 的模型建立在代表性消费者的 Lucas 树模型之上。假设果树在 t 时期的产量 A_t 是外生且随机的，果树的数量是恒定的，也即不考虑投资和折损。由于经济是封闭的，所有的产出都将被消费掉，因此 $A_t = C_t$ 。假设在 t 时期经济中存在某种一期的风险资产，它对 $t+1$ 期的产量 A_{t+1} 具有索取权，假设该资产在 t 时期的价格为 P_{t1} ，因此该资产的总收益率为

$$R_{t1}^e = \frac{A_{t+1}}{P_{t1}}$$

同时，经济中也存在某种无风险资产，某种意义上可以认为该资产是政府债券，它总收益率记为 R_{t1}^f 。

假设外生的产量满足如下随机过程：

$$\log(A_{t+1}) = \log(A_t) + \gamma + u_{t+1} + v_{t+1}$$

其中 γ 是产量的长期平均增长率， u_{t+1} 是独立同分布 (i. i.d.) 的均值为 0、方差为 σ^2 的正态随机波动项， v_{t+1} 代表了低频但幅度巨大的随机波动，也即为罕见灾难项，它满足如下分布：

$$v_{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{prob} = e^{-p} \\ \log(1-b), & \text{prob} = 1 - e^{-p} \end{cases}$$

在该文的设定中， b 为常数，表示灾难规模，即灾难对总消费造成的收缩比例，每单位时间的灾难发生概率为 p 。

由于所有的产出都将被消费掉，上述产出过程也就是消费过程，因而我们有：

$$\log(C_{t+1}) = \log(C_t) + \gamma + u_{t+1} + v_{t+1}$$

假设效用函数为幂效用 (Power Utility) 函数形式，代表性消费将最大化如下效用：

$$U_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} [e^{-\rho i} \cdot u(C_{t+i})]$$

其中， $u(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$ ， θ 为相对风险厌恶系数。

该最优化问题有如下欧拉方程：

$$u'(C_t) = e^{-\rho} E_t [u'(C_{t+1}) \cdot R_{t1}]$$

将消费过程代入上述欧拉方程，可以推导出股权溢价的解析解：

$$\log [E_t (R_{t1}^e)] - \log [E_t (R_{t1}^b)] = \theta \sigma^2 + p(1-q) [E(1-b)^{-\theta} - E(1-b)^{1-\theta} - Eb]$$

为了确定灾难规模 b 与灾难发生概率 p 的大小，Barro (2006) 测度了 20 世纪以来世界各国所经历的对人均 GDP 造成 15% 以上收缩的灾难性事件。他统计得出，在 100 年内 35 个国家共发生了这类灾难 60 次，这些灾难对人均 GDP 平均造成 29% 的收缩。因此， p 的基准值定在每年 1.7%， b 定在 29%。在确定了其他参数值后，最终该模型将相对风险厌恶系数 θ 定在了 3~4，并得到了 4%~6% 的股权溢价以及 1%~2% 的无风险利率。

Barro (2006) 使用了幂效用 (Power Utility) 函数，该效用函数中，相对风险厌恶系数 θ 与跨期替代弹性 (IES) 互为倒数，即 $IES = 1/\theta$ 。当相对风险厌恶系数 $\theta > 1$ 的时候，跨期替代弹性 IES 小于 1，而 Bansal 和 Yaron (2004) 认为跨期替代弹性 IES 的值大于 1 是推导出预期消费增长率与价格股息比之间的正相关关系以及消费波动率与价格股息比之间的负相关关系这两个推论的条件。因此，鉴于幂效用函数在资产定价方面存在如上的问题，Barro (2009) 采用了 Epstein-Zin (1989) -Weil (1990) (EZW) 效用函数来替代幂效用函数。

EZW 效用函数形式如下：

$$U_t = \frac{\left\{ C_t^{1-\theta} + \beta [(1-\gamma) E_t U_{t+1}]^{\frac{1-\theta}{1-\gamma}} \right\}^{\frac{1-\gamma}{1-\theta}}}{1-\gamma}$$

其中，参数 γ 是相对风险厌恶系数 (CRRA)，参数 $\frac{1}{\theta}$ 是跨期替代弹性 (IES)，参数 β 是代表性消费者的主观折旧率。对于该效用函数，Epstein 和 Zin (1989) 指出任意资产的收益率满足以下一阶条件：

$$E_t \left[\beta^{\frac{(1-\gamma)}{(1-\theta)}} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\frac{-\theta(1-\gamma)}{(1-\theta)}} R_{w,t+1}^{\frac{(\theta-\gamma)}{(1-\theta)}} R_{a,t+1} \right] = 1$$

其中， $R_{a,t+1}$ 为资产 a 在 $t+1$ 时期的总收益率， $R_{w,t+1}$ 为总财富在 $t+1$ 时期的总收益率，总财富在该模型中是指以一国的总消费流作为收益的股权资产的价值。EZW 效用函数能有效地将相对风险厌恶系数与跨期替代弹性分离开来，从而避免了使用幂效用函数 (Power Utility) 推出的资产定价方面与实际观察相悖的结论。因此，EZW 效用函数也是目前资产定价等相关领域较为常用的效用函数形式。

Barro (2009) 在 Barro (2006) 的罕见灾难模型框架下, 用 EZW 效用函数替代幂效用函数, 推导出当相对风险厌恶系数在 3~4 时, 模型可以得出类似的股权溢价与无风险利率结果。同时, 由于跨期替代弹性 $IES > 1$, 价格股息比与消费不确定性、消费增长率之间可推出预期的相关关系。需要指出的是, Barro (2006) 的数据来源于 Maddison (2003) 提供的 35 个国家的 GDP 数据, 但是 Barro (2006) 模型中的罕见灾难是基于消费数据而言的; 尽管在大部分时间我们使用 GDP 数据来代替消费数据不会有大的偏差, 但是它们之间的区别依然存在, 这点在战争时期表现得尤其明显。比如, 两次世界大战时期, 英国的 GDP 增加但消费者消费总量却减少了, 这之间的差距主要来源于大量增加的军备支出。再者, Maddison (2003) 填补 GDP 空缺数据的方法存在一些问题, 且大部分被填补的空缺数据均处于灾难时期。例如, Maddison 假设在一战和二战期间比利时的 GDP 与法国在该时期的 GDP 同步变化; 又如, 1910—1919 年期间的墨西哥正经历革命与独立战争, 然而 Maddison 在处理 GDP 空缺数据时却简单地假设了一段平稳变化。以上问题, 对罕见灾难模型的估计将产生较大的影响。鉴于此, Barro 和 Ursua (2008) 修正并拓展了 Barro (2006) 所使用的数据, 将数据起点最早延伸至 1870 年, 同时分离出消费数据和 GDP 数据, 并重新利用修正的数据来估计罕见灾难模型, 最终模型需要 3.5 的相对风险回避系数来匹配 7% 的股权溢价。

Barro (2006, 2009) 的模型设定奠定了第一代罕见灾难模型的基础。可以说, 到目前为止, 罕见灾难模型最为成功地解释了股权溢价谜题, 同时也为学术界提供了一种从宏观经济角度研究资产定价问题的范式。之后, 有不少的学者基于 Barro (2006, 2009) 罕见事件模型的框架进行一系列的拓展。

(一) 可变的灾难规模

Barro (2006, 2009) 的模型中的关键参数分别是罕见灾难发生的概率 p 以及灾难规模 b 。Barro (2006, 2009) 假设这两个参数均为恒定的常数, 利用 36 个国家的长期 GDP 数据, 用对人均 GDP 造成 10% 以上收缩的灾难事件的发生频率以及这些灾难规模的平均数分别来估计 p 和 b 。恒定的发生概率与灾难规模是一个十分简化的假定。实际上, 灾难发生的概率与规模会随着不同的历史时期、经济环境的变化而变化。另外, 由于灾难事件样本数据的选取可能由于数据遗失而存在着选取偏差, 用简单平均的方法估计参数可能会造成较大的偏误。因此, 不少文章均在灾难发生的概率参数与规模参数的估计上做了更加精细的讨论。

Barro 和 Jin (2011) 修正了 Barro (2006, 2009) 关于事件规模的假设, 用双幂律 (double power law) 分布来拟合灾难规模。幂律分布, 又名厚尾分布, 帕累托 (Pareto) 分布、

Zipfian 分布、分形分布，被广泛地应用于物理学、经济学、计算机科学、生态学、生物学、天文学等学科。它的密度函数如下：

$$f(z) = Az^{-(\alpha+1)}, \text{ 对于 } z \geq z_0$$

其中， $A > 0, \alpha > 0$ 。由于密度函数 $f(z)$ 在 $(z_0, +\infty)$ 区间积分必须为 1，因此有 $A = \alpha z_0^{-\alpha}$ 。Barro 和 Jin (2011) 发现用简单的幂律分布来拟合灾难规模的效果不够理想，因而改用如下双幂律分布，其密度函数如下：

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } z < z_0 \\ Bz^{-(\beta+1)}, & \text{if } z_0 \leq z < \delta \\ Az^{-(\alpha+1)}, & \text{if } \delta \leq z \end{cases}$$

其中， $\beta, \alpha, A, B, z_0 > 0, \delta \geq z_0$ 是两个指数分别为 β, α 的不同的幂律分布的分界点。同样，由于密度函数 $f(z)$ 在 $(z_0, +\infty)$ 区间积分为 1 以及密度函数在 $z = \delta$ 点处的连续性，可以计算出参数 A, B 应满足如下关系：

$$B = A\delta^{\beta-\alpha}$$

以及

$$\frac{1}{A} = \frac{\delta^{\beta-\alpha}}{\beta} (z_0^{-\beta} - \delta^{-\beta}) + \frac{\delta^{-\alpha}}{\alpha}$$

Barro 和 Jin (2011) 用极大似然估计方法来估计上述密度函数的参数，这一参数化方法能有效地避免样本的选择偏差问题，从而更准确地还原整体分布情况。最终，当 $\alpha = 4.16, \beta = 10.10$ 时，该双幂律分布能很好地拟合灾难规模。匹配股权溢价数据所需的相对风险厌恶系数 $\gamma = 3$ ，95%置信区间约为 [2, 4]。

(二) 可变的灾难概率

以上的罕见灾难模型很好地解释了股权溢价之谜以及无风险利率之谜，然而他们均难以解释股权收益高波动率的问题。假设股权收益没有杠杆，那么按照模型设定，消费增长波动率与股权收益波动率应该相差不大。然而，二战后期的消费增长波动率仅有 1.3%，但股权收益波动率却高达 18%，即使加入了杠杆，也不能解释两者波动率如此大的差异。目前的模型设定股权收益波动率的来源大部分来自灾难时期的消费增长的波动，然而这无法解释实际股权收益在非灾难时期也依旧高企的波动率。因此，研究者开始着眼于模型另一个重要参数——灾难发生概率。他们试图将常值概率转变为随时间而变的灾难概率，以期增强模型的解释力。

在 Gourio (2008b) 的模型设定中罕见灾难发生的概率在两个离散值中变动，并在递归效用函数的框架下求解资产定价相关指标。Gabaix (2012) 在幂效用函数的框架下，

假定经济由一个线性生成过程驱动，该过程包含了罕见灾难发生概率的时变性以及股息对罕见灾难反应程度的时变性。这样的假定得以推导出股权以及其他资产价格的解析解。然而在数值模拟阶段，Gabaix（2012）仅仅允许股息对罕见灾难的反应程度体现出时变性。这一点不同于 Wachter（2013），其在递归效用函数的框架下假设了一个随时间而变的罕见事件发生概率，概率的时变性通过一个跳跃强度服从平方根的泊松过程体现。模型校准的结果能有效提升股权风险溢价程度以及股权收益的波动性。

Wachter（2013）的模型同样建立在一个无限期存活的代表性消费者的禀赋经济中。模型设定与 Barro（2006，2009）基本类似，但其模型建立在连续时框架下。假设总禀赋满足如下过程：

$$dC_t = \mu C_t dt + \sigma C_t dB_t + (e^{Z_t} - 1)C_t dN_t$$

其中， B_t 是标准布朗运动， N_t 是一个泊松过程，其强度 λ_t 随时间而变，满足如下过程：

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{\lambda} - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dB_{\lambda,t}$$

其中， $B_{\lambda,t}$ 同样是标准布朗运动， B_t 、 $B_{\lambda,t}$ 和 N_t 是互为独立的过程。 Z_t 是一个随机变量，其分布不随时间而变，且独立于 N_t 、 B_t 。 C_t 是一个跳跃扩散过程(jump-diffusion process)，扩散项 $\mu C_t dt + \sigma C_t dB_t$ 代表了非灾难时期的消费过程，也即当经济处于非灾难状态时，在一个时间间隔 Δt 内的消费增长率的对数值满足均值为 $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$ 、方差为 $\sigma^2\Delta t$ 的正态分布。泊松过程 N_t 代表灾难项，它使得消费过程存在瞬时的跳跃。强度参数 λ_t 可被看作下一期的灾难概率。

模型对股息过程做了如下假定。根据 Abel（1999）和 Campbell（2003），股息被假定为满足 $D_t = C_t^\phi$ ，参数 ϕ 通常被称为杠杆率。从实际数据来看，股息表现出顺周期性，且当处于灾难时期会发生比消费更剧烈的波动，这意味着 $\phi > 1$ 。Wachter（2013）在校准模型时采用 $\phi = 2.6$ 。根据伊藤定理，可以得出股息满足如下过程：

$$\frac{dD_t}{D_t} = \mu_D dt + \phi\sigma dB_t + (e^{\phi Z_t} - 1)dN_t$$

其中， $\mu_D = \phi\mu + \frac{1}{2}\phi(\phi-1)\sigma^2$ 。

对于消费者，模型采用了 EZW 效用函数的连续时版本，并令 IES=1 得到该效用函数的极限形式。假设代表性消费者的效用函数 V_t 满足如下递推形式：

$$V_t = E_t \int_t^\infty f(C_s, V_s) ds$$

其中, $f(C, V) = \beta(1-\gamma)V \left(\log C - \frac{1}{1-\gamma} \log((1-\gamma)V) \right)$ 。

Wachter (2013) 使用相对风险厌恶系数为 $\gamma=3$, 模型模拟结果显示总体股权溢价为 7.61%, 无风险利率为 0.99%, 股权收益波动率为 19.89%; 在未发生灾难时期, 股权溢价为 8.85%, 无风险利率为 1.36%, 股权收益波动率为 17.66%, 很好地匹配了美国二战后 17.72% 的股权收益波动率数据。但是 Wachter (2013) 对灾难概率的估计结果并不理想, 最高的概率仅为 14%, 出现在一战时期, 这显然不符合人们对于灾难事件的直观认知。

关于随时间而变的灾难发生概率问题吸引了不少学者的关注, 很多文章已经跳出了 Barro (2006, 2009) 理论模型的框架, 而从实证角度来测度灾难发生概率。这些文献多从金融交易数据中挖掘罕见事件发生的概率。如 Backus 等人 (2011) 从指数期权交易数据中提炼市场崩溃风险溢价, 但其假设了恒定的发生概率。Seo 和 Wachter (2015), Gao 和 Song (2015), Kelly 和 Jiang (2014), Farhi 和 Gabaix (2011), 以及 Siriwardane (2015) 等的文献假设了随时间而变的罕见灾难发生概率, 并从期权价格和横截面的股票收益中判断尾部风险。对于无法直接观测的罕见灾难发生概率, 这类文献往往通过某个可观测指标间接估算得到; 因而其问题大多集中于资产价格和灾难风险概率变化之间的关系, 文献的结论也大多集中于罕见灾难的风险是股权溢价的一个因素。同时, 由于该类文献经由资产交易价格数据获取罕见事件发生概率, 因此是风险中性的灾难发生概率, 而非实际发生概率。

以上介绍了 Barro (2006, 2009) 罕见灾难模型的基本框架以及基于此框架的一些拓展研究。Barro (2006, 2009) 的模型框架基本构成了第一代罕见灾难模型。然而, 这一模型框架也受到了不少研究者的批评。Gourio (2008a) 认为 Barro (2006, 2009) 的模型在测度灾难规模的方法上使用了 GDP 或消费增长率的“peak-to-trough”测度, 这样会很大程度上放大罕见灾难性事件的风险程度, 从而夸大风险溢价水平。Gourio (2008a) 还认为灾难事件对 GDP 或消费水平的影响不是永久性的, 灾难过后往往会伴随一段经济快速增长的时期, 即灾难造成的 GDP 损失是暂时的, 在灾难过后会得到迅速的回补。Kilian 和 Ohanian (2002) 也强调了允许灾难对 GDP 影响的暂时性波动的重要性。另外一方面, Barro (2006, 2009) 假设灾难对经济造成的影响是瞬间完成的。Blanchard 和 Constantinides (2008) 认为灾难的发生一般会延续好几年, 假设按照“peak-to-trough”的测度灾难事件对 GDP 造成了超过 30% 的巨大影响, 而若将此影响摊平至灾难存续的若干年内, 则每年灾难的实际影响会大大减小, 远远小于 Barro

(2006, 2009) 所假设的 30% 的瞬间影响。因此该处理同样会放大罕见灾难风险, 夸大股权溢价程度。

三、第二代罕见灾难模型

基于以上批评, Nakamura 等 (2013) 对 Barro (2006, 2009) 中的罕见事件模型做了较大的改进, 形成了罕见灾难第二代模型。具体改进在以下几个方面: (1) Nakamura 等 (2013) 模型包含了罕见事件后经济快速增长的恢复期; (2) 不同于 Barro (2006, 2009) 关于罕见事件瞬时发生的假定, Nakamura 等 (2013) 将罕见事件的发生延展至若干期内完成, 并赋予随机性; (3) 通过将罕见事件区分为世界性和国别性两种, 使得各国在罕见事件发生的时间上相关。Nakamura 等 (2013) 的具体模型设定如下。

Nakamura 等 (2013) 模型同样建立在具有代表性消费者的 Lucas 树经济环境下, 生产完全是外生且随机的, 不存在投资, 因而消费水平完全等于总生产量。假设一国的人均消费水平可以分解为以下三个潜在变量:

$$c_{it} = x_{it} + z_{it} + \varepsilon_{it}$$

其中, c_{it} 是国家 i 在 t 时期的人均消费水平的对数值, x_{it} 是潜在人均消费水平, 也可以理解为消费趋势项, z_{it} 是消费差距项, 它描述了实际消费水平与潜在消费水平因当前或过往的灾难造成的差距。 x_{it} 与 z_{it} 是此模型中刻画罕见灾难的核心变量, 它们的变化过程依赖于经济所处的状态, 下文会具体刻画这两个变量。 ε_{it} 是消费过程的一般波动项, 服从独立同分布的均值为 0、标准差为 $\sigma_{\varepsilon it}$ 的正态分布, $\sigma_{\varepsilon it}$ 随国家 i 、时期 t 的不同而不同。按照 Nakamura 等 (2013) 所述, 对每个国家而言, $\sigma_{\varepsilon it}$ 依时期不同将取两个不同的值。这是由于二战后国家账户统计方法的提高, 各国的消费数据在 1946 年之后明显变得光滑, 因此每个国家的参数 $\sigma_{\varepsilon it}$ 分别取两个值, 一个对应于 1946 年以前的数据, 一个对应于 1946 年之后的数据。

假设经济中有两种状态, 非灾难状态和灾难状态。每种状态有一定的趋势继续保持, 同时两种状态之间也有一定的概率可以互相转化。为了使得各国所处的经济状态之间有一定的关联性, Nakamura 等 (2013) 均将经济状态分为世界经济状态和国家经济状态两种。

世界经济状态, 分为非灾难和灾难两种状态。我们用 I_{wt} 来表示世界经济状态, $I_{wt} = 1$ 即世界处于灾难状态。假定 I_{wt} 的先验分布为如下二项分布

$$I_{wt} = \begin{cases} 1, & \text{Prob} = p_w \\ 0, & \text{Prob} = 1 - p_w \end{cases}$$

其中, $p_w > 0$ 。

国家经济状态用 I_{it} 表示, 类似地, $I_{it} = 1$ 表示国家处于灾难状态, $I_{it} = 0$ 表示该国处于非灾难状态。国家经济状态 I_{it} 的变动过程相较于 I_{wt} 而言更为复杂, 其各状态之间的转移概率不仅依靠其前一期的状态, 还依赖于当期世界所处的状态, I_{it} 的先验转移概率假定如下

$$\Pr(I_{it} = 1 | I_{i,t-1}) = \begin{cases} p_{Cbw} I_{wt} + p_{Cbl} (1 - I_{wt}), & \text{if } I_{i,t-1} = 0 \\ 1 - p_{Ce}, & \text{if } I_{i,t-1} = 1 \end{cases}$$

其中, p_{Cbw} 为当世界处于灾难状态时, 某国家进入灾难状态的概率。 p_{Cbl} 为当世界处于非灾难状态时, 某国家进入灾难状态的概率。当某国在 $t-1$ 时期处于灾难状态时, 该国在时期 t 将退出灾难状态的概率为 p_{Ce} 。也即各国进入灾难的概率将通过 I_{wt} 产生联系, 这对于准确估计各国进入灾难状态的条件概率具有重要作用。

灾难影响人均消费水平主要通过以下两个途径: 第一, 灾难会导致消费水平在短期内产生一个幅度巨大的下降; 第二, 灾难可能会影响潜在消费水平, 而长期而言, 实际消费水平 (在不发生新的灾难的条件下) 会趋近潜在消费水平。以下将具体说明这两类影响。首先, Nakamura 等 (2013) 用 θ_{it} 表示灾难在时期 t 对国家 i 的潜在消费水平造成的改变量; 其次, 用 ϕ_{it} 代表灾难在时期 t 对国家 i 的实际消费水平造成的暂时性下降。假设 θ_{it} 不影响当期的实际消费水平, 而且 ϕ_{it} 不影响长期的消费水平。具体而言, 永久性灾难冲击 θ_{it} 可能代表了由于灾难所导致的在研发 (R&D) 或其他可以增加潜在消费水平或促进组织架构良性转型的经济投入上的永久性损失, 短期冲击 ϕ_{it} 可能代表了灾难导致的某些基础设施的损坏, 政府对个人消费的挤出效应, 或灾难时期金融体系抗压能力暂时性的减弱。

假设永久性冲击 θ_{it} 满足正态分布 $\theta_{it} \sim N(\theta, \sigma_\theta^2)$, 也就是说灾难在长期有可能对消费水平带来正向作用, θ 与 σ_θ^2 分别为正态分布的均值和方差, 它们不随时间和国家的变化而变化。暂时性冲击 ϕ_{it} 满足截断的正态分布 $\phi_{it} \sim tN(\phi^*, \sigma_\phi^{*2}; -\infty, 0)$, 其中 ϕ^* 和 σ_ϕ^{*2} 分别表示截断之前的完整正态分布的均值和方差, 同样不随国家和时期的变化而变化。

一国的潜在消费水平 x_{it} 满足如下过程

$$\Delta x_{it} = \mu_{it} + I_{it} \theta_{it} + \eta_{it}$$

其中, $\Delta x_{it} = x_{it} - x_{it-1}$, 由于消费变量取了对数值, 因而其表示潜在消费水平在时期 t 的增长率, μ_{it} 是一国的长期消费增长率, 随国家与时间而变化。潜在消费水平 x_{it} 的变化过

程中包含了罕见灾难因素 $I_{it}\theta_{it}$ 的作用。罕见灾难因素 $I_{it}\theta_{it}$ 中 θ_{it} 是灾难的永久性冲击部分，所谓永久性，即是灾难冲击对潜在消费水平的影响，这种影响是永久的、不可恢复的。 θ_{it} 只有在灾难发生时，即 $I_{it}=1$ 时，才会对 Δx_{it} 起作用。当 $\theta_{it} < 0$ ，灾难对长期的消费增长率造成了永久性损失，即消费水平恢复率小于 100%；当 $\theta_{it} > 0$ ，一国的经济反而因为灾难的发生而获益，即恢复率大于 100%。 η_{it} 为独立同分布的正态分布波动项，其标准差为 σ_{η} ，随国家的不同而不同。

上式中的潜在消费水平 x_{it} 关乎灾难的永久性冲击部分，而消费差距项 z_{it} 则关乎灾难的暂时性冲击部分。正如前文所述，消费差距项 z_{it} 表示了由过去和当期的灾难冲击所导致的实际消费水平与潜在消费水平之间的差距，其演化满足如下方程

$$z_{it} = \rho_z z_{i,t-1} + I_{it}\phi_{it} - I_{it}\theta_{it} + v_{it}$$

其中， $0 < \rho_z < 1$ ，为一阶自回归系数， v_{it} 是均值为 0 的独立同分布波动项，满足正态分布， σ_{v_i} 为其标准差。 $I_{it}(\phi_{it} - \theta_{it})$ 刻画了灾难的暂时性冲击部分。消费差距项 z_{it} 式中的 $-I_{it}\theta_{it}$ 项正好与潜在消费水平增长率 Δx_{it} 式中的 $I_{it}\theta_{it}$ 项相抵消，因此，当灾难发生 ($I_{it}=1$) 的第一年，消费水平受到大小为 ϕ_{it} 的瞬时冲击，其中 θ_{it} 是永久性地影响潜在消费水平的冲击， $\phi_{it} - \theta_{it}$ 是暂时性的、灾后会恢复的消费冲击。其后各变量依照相关方程进行演化。当灾难结束时， ϕ_{it} 与 θ_{it} 不再起作用，消费差距项 z_{it} 按照 ρ_z 的速率逐渐收敛至 0。

关于消费者的设定，Nakamura 等 (2013) 同样假定代表性消费者具有 Epstein-Zin (1989)–Weil (1990) (EZW) 效用函数。

以上便是 Nakamura 等 (2013) 罕见灾难模型的模型架构，可以看出，相比于 Barro (2006, 2009) 的第一代罕见灾难模型，Nakamura 等 (2013) 的模型能有效地解决第一代罕见灾难模型中灾难瞬时发生、忽略灾后经济快速恢复期等可能会放大灾难风险的问题。另一方面，模型的复杂程度也大大增加了，再加之 EZW 效用函数递归形式，该模型已无法求得解析解，因而 Nakamura 等 (2013) 利用 Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 算法估计模型，再求出相应资产定价模型的数值解。

Nakamura 等 (2013) 的结果表明，平均而言，罕见灾难达到其最低谷花费约 6 年时间，其导致一国人均实际消费支出降幅平均为 27%，而其中约一半的降幅会逐渐恢复。Nakamura 等 (2013) 将跨期替代弹性 IES 定为 2，为匹配长期平均股权溢价数据，需要相对风险回避系数为 6.4。尽管 Nakamura 等 (2013) 模型在很多方面改进了 Barro (2006, 2009) 的基准模型，但风险回避系数相对偏高，这一点不尽如人意。这主要是因为 Nakamura 等 (2013) 允许出现灾难后的经济恢复期，其效果近似于减小了灾难的规模，因此估计出的风险回避系数值增大了。

四、罕见灾难模型与其他资产类别

前文所述文献大多集中于将罕见灾难模型用于解释股权和短期债券的资产定价谜题，另一部分文献试图用该模型框架解释其他资产的定价问题。

（一）利率期限结构

名义利率期限结构曲线是向上的，长期债券收益相对于短期债券的溢价程度与变化难以被标准模型所解释。另外，类似于超额股权溢价，长期债券超额收益也是可预测的。债券收益相关的种种发现一直以来是债券定价方面待解的问题。Gabaix（2012）和 Tsai（2015）试图用罕见灾难模型来解释利率期限结构的问题。在他们的模型中，禀赋会受到罕见灾难的冲击，这些灾难往往伴随快速上升的通货膨胀。消费水平的大幅下降和高通胀同时发生的可能性对于名义债券定价有重要影响。当灾难发生时，名义债券的实际价值下降，因此投资者会要求额外的风险溢价。期限越长的债券对这种风险越发敏感，这也意味着一条上升的名义债券收益率曲线。如果债券风险溢价因为随时间而变的通胀风险敞口（Gabaix, 2012）或因为通胀灾难发生概率的变化（Tsai（2015））而随时间变化，则债券收益是可预测的。Tsai（2015）的模型中，由于通胀灾难和影响股权收益的灾难的发生可以不一致，债券与股权风险溢价也可出现不一致的变化。正如 Duffee（2012）指出，债券溢价的预测指标可能不是预测股权溢价好的指标，反之亦然。

（二）期权

期权定价问题中存在的谜题之一是 Black-Scholes（1973）公式难以解释深度虚值看跌期权的高价问题。Black-Scholes（1973）公式中隐含波动率（implied volatility）是常值，正好对应于底层资产的波动率。然而研究者发现期权价格的隐含波动率会随着行权价格的变化而变化。对应于同一底层资产，虚值看跌期权（out-of-the-money put option）往往价格偏高，也就是说，虚值看跌期权的隐含波动率会高于平价看跌期权（at-the-money put option）的隐含波动率。隐含波动率随着行权价格的上升而下降的现象被称为波动率偏离（volatility skew）。有不少文献试图基于罕见灾难的框架来解释深度虚值看跌期权的高价问题。Backus 等（2011）的研究建立在 Barro（2006, 2009）的独立同分布灾难风险模型框架下，他们发现将灾难风险加入模型的确能够解释波动率偏离的问题，但却出现了模型得出的偏离程度大于数据所显示的偏离程度的问题。Seo 和 Wachter（2015）采用了 Wachter（2013）的模型框架，即灾难发生概率随时间

而变化。他们发现加入了随机概率后模型能同时解释股权溢价、股权波动率以及期权的隐含波动率问题。

除了债券、期权等资产，罕见灾难模型还应用于解释一系列的经济金融问题，如 Gourio（2012）将罕见灾难模型用于解释实际经济周期。其根据风险溢价逆周期的事实，在传统的真实经济周期模型中加入罕见灾难（发生的概率可变），并证明当罕见灾难发生的概率越大，就业、产出、投资、股票价格和利率都会下降，而风险资产的预期回报则上升，从而表明罕见灾难在真实经济周期模型中起着十分重要的作用。罕见灾难的想法还可以解释开放条件下各国之间的利率和汇率差异之谜。Farhi 和 Gabaix（2011），Guo（2011）利用罕见灾难成功地解释了利率差异之谜和汇率的远期升水之谜。

大部分将罕见灾难模型应用到经济金融不同领域的文献都建立在 Barro（2006, 2009）的第一代罕见灾难模型框架下，相较于 Nakamura 等（2013）的第二代模型，第一代模型架构简单，可处理性强，往往能够求得解析解，当然在设定上仍旧存在前文所述的一系列问题。

五、国内关于罕见灾难模型的相关文献

迄今为止，国内研究还鲜有涉及罕见灾难相关主题。联系最直接的是陈国进等（2014）的研究，其构建了包含灾难风险因素的 RBC 模型，通过区分全要素生产率（TFP）灾难、资本灾难与双重灾难三种灾难形式，分析灾难风险因素对我国经济波动的解释能力。陈彦斌（2009）等研究了灾难风险对我国城镇居民财产分布的影响。庄子罐（2011）认为中国宏观稳定政策的收益主要来源于灾难发生概率的降低，灾难风险在解释我国福利成本方面有重要作用。陈国进等（2015）从个股横截面数据提取尾部风险作为随时间变化罕见灾难风险的代理指标，实证分析了罕见灾难风险作为定价因子对我国股市收益的预测能力和横截面收益的解释能力。

六、结论

综上所述，罕见灾难模型为资产定价问题提供了一个极具洞察的想法和直观明了的框架，它能很好地解释股权溢价、股权溢价波动率、无风险利率，以及债券、期权、外汇等等各种资产定价方面的问题。同时，该类模型也为诸多经济金融问题的研究提供了

重要的突破口，如罕见灾难模型从禀赋经济扩展至包含生产的经济中，再如将学习过程加入灾难模型以放松理性预期的假设等，均能产生丰富的研究结果。另外，国内目前关于罕见灾难模型的研究较少，将罕见灾难模型与中国经济发展实际情况相结合也是另外一个可推进的方向。

参考文献

- [1] 陈国进, 晁江锋, 武晓利, 赵向琴. 罕见灾难风险和中国宏观经济波动. 经济研究, 2014 (8).
- [2] 陈国进, 许秀, 赵向琴. 罕见灾难风险和股市收益——基于我国个股横截面尾部风险的实证分析. 系统工程理论与实践, 2015, 35 (9).
- [3] 陈彦斌, 霍震, 陈军. 灾难风险与中国城镇居民财产分布. 经济研究, 2009 (11).
- [4] 庄子罐. 中国经济周期波动的福利成本研究——基于小概率“严重衰退”事件的视角. 金融研究, 2011 (4).
- [5] Abel, A.. Risk premia and term premia in general equilibrium. *Journal of Monetary Economics*, 1999 (43): 3–33.
- [6] Backus, D., Chernov, M., Martin, I.. Disasters implied by equity index options. *The Journal of Finance*, 2011, 66 (6): 1969–2012.
- [7] Bansal, R., Yaron, A.. Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *The Journal of Finance*, 2004, 59 (4): 1481–1509.
- [8] Barro, R. J.. Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *The Quarterly Journal of Economics*, 2006 (121): 823–866.
- [9] Barro, R. J.. Rare disasters, asset prices, and welfare costs. *The American Economic Review*, 2009 (99): 243–264.
- [10] Barro, R. J., Jin, T.. On the size distribution of macroeconomic disasters. *Econometrica*, 2011 (79): 1567–1589.
- [11] Barro, R. J., Jin, T.. Rare events and long-run risks. *National Bureau of Economic Research*, 2016, w21871.
- [12] Barro, R. J., Ursúa, J. F.. Macroeconomic crises since 1870. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2008: 255–335.
- [13] Black, F., Scholes, M.. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973 (81): 637–654.

- [14] Blanchard, O. J., Constantinides, G. M.. Comments and discussion. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2008 (1): 336–350.
- [15] Campbell, J. Y.. Consumption-based asset pricing. *Handbook of the Economics of Finance*, 2003 (1): 803–887.
- [16] Campbell, J. Y., Shiller, R. J.. The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors. *Review of Financial Studies*, 1988 (1): 195–228.
- [17] Duffee, G. R.. Bond pricing and the macroeconomy. *Handbook of the Economics of Finance*, 2013 (2): 907–967.
- [18] Epstein, L., Zin, S.. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns:A theoretical framework. *Econometrica*, 1989 (57): 937–969.
- [19] Farhi, E., Gabaix, X.. Rare disasters and exchange rates. *New York University Working Paper*, 2011.
- [20] Gabaix, X.. Variable rare disasters:an exactly solved framework for ten puzzles in macro-finance. *The Quarterly Journal of Economics*, 2012 (127): 645–700.
- [21] Gao, G., Song, Z.. Rare disaster concerns everywhere, 2015, SSRN 2606345.
- [22] Gourio, F.. Disasters and recoveries. *The American Economic Review*, 2008, 98 (2): 68–73.
- [23] Gourio, F.. Time-series predictability in the disaster model. *Finance Research Letter*, 2008, 5 (4): 191–203.
- [24] Gourio, F.. Disaster risk and business cycles. *American Economic Review*, 2012 (102): 2734–2766.
- [25] Guo, K.. Exchange rates and asset prices in an open economy with rare disasters. *International Monetary Fund Working paper*, 2011.
- [26] Hansen, L. P., Jagannathan, R.. Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, 1991 (99): 225–262.
- [27] Kelly, B., Jiang, H.. Tail risk and asset prices. *Review of Financial Studies*, 2014, 27 (10): 2841–2871.
- [28] Kilian, L., Ohanian, L. E.. Unit roots, trend breaks, and transitory dynamics:a macroeconomic perspective. *Macroeconomic Dynamics*, 2002, 6 (5): 614–632.
- [29] Maddison, A.. *The world economy:historical statistics*, OECD Publishing, 2003.
- [30] Mehra, R., Prescott, E. C.. The equity premium:A puzzle. *Journal of monetary Economics*, 1985, 15 (2): 145–161.

- [31] Nakamura, E., Steinsson, J., Barro, R., Ursúa, J.. Crises and recoveries in an empirical model of consumption disasters. *American Economic Journal:Macroeconomics*, 2013, 5 (3): 35–74.
- [32] Rietz, T. A.. The equity risk premium a solution. *Journal of monetary Economics*, 1988, 22 (1): 117–131.
- [33] Seo, S., Wachter, J. A.. Option prices in a model with stochastic disaster risk. University of Pennsylvania Working Paper, 2015.
- [34] Shiller, R. J. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends?. *American Economic Review*, 1981 (71): 421–436.
- [35] Siriwardane, E.. The probability of rare disasters:estimation and implications. Harvard Business School Working Paper, 2015: 16–61.
- [36] Tsai, J.. Rare disasters and the term structure of interest rates. SSRN, 2015. <https://ssrn.com/abstract=2669992>.
- [37] Wachter, J. A.. Can time-varying risk of rare disasters explain aggregate stock market volatility?. *The Journal of Finance*, 2013, 68 (3): 987–1035.
- [38] Weil, P.. The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 1989 (24): 401–421.

Research Progress in Rare Disaster Models

Huang Xiaoyu¹ Jin Tao²

(1. *School of Banking and Finance, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China;*

2. *PBC School of Finance, Hang Lung Center for Real Estate, Tsinghua University, Beijing 100083, China)*

Abstract: The rare disaster model, as one of the major macro-finance models, offers an insightful and parsimonious framework for understanding asset pricing puzzles. In this paper, we review the development of rare disaster models with emphases on several kinds of typical rare disaster models which provide explanations for some long-standing asset pricing puzzles such as the equity premium puzzle, the risk-free rate puzzle, the volatility puzzle, and other stock market features. Moreover, rare disaster models also help to solve other puzzles in asset pricing, like the term structure, volatility skewness of options, etc. All in all, rare disaster models provide potential breakthroughs for many problems in economics and finance and are worthy of further exploration.

Keywords: rare disaster models; equity premium puzzle; risk-free rate puzzle; volatility puzzle; term structure; volatility skewness